Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a V-a

Problema 1. Putem aranja primele 49 de numere naturale nenule pe o tablă 7×7, astfel încât fiecare pătrat al tablei să conțină câte un număr și orice două numere prime să nu fie vecine?

Spunem că două numere de pe tablă sunt *vecine* dacă sunt situate în pătrate diferite care au o latură comună sau un vârf comun.

Gazeta Matematică

Problema 2. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 2025. Trei prietene colorează numerele după cum urmează: Alexia colorează cu roșu numerele 1 și 2, apoi Bianca colorează cu galben numerele 3, 4 și 5, iar Cristina colorează cu albastru numerele 6, 7, 8 și 9; procedeul se repetă: Alexia colorează cu roșu următoarele două numere, Bianca colorează cu galben următoarele trei numere, iar Cristina colorează cu albastru cele patru numere care urmează. Prietenele continuă să coloreze până când toate numerele sunt colorate.

a) Stabiliți ce culoare va avea numărul 2024.

b) Determinați cel mai mic număr natural n cu proprietatea că, după ce au fost colorate n numere, suma numerelor care au fost colorate cu galben este mai mare decât 2024.

Problema 3. Arătați că:

a) există o infinitate de numere naturale n astfel încât numărul $2 \cdot n$ este pătrat perfect, iar numărul $3 \cdot n$ este cub perfect;

b) nu există niciun număr natural m astfel încât numărul $2 + m$ să fie pătrat perfect, iar numărul $3 \cdot m$ să fie cub perfect.

Problema 4. Vom spune că un număr natural $n \geqslant 5$ se numește *special* dacă, oricum am lua 5 numere distincte dintre numerele $1, 2, 3, \ldots, n$, există printre ele 4 numere distincte a, b, c, d astfel încât $a + b = c + d$.

a) Arătați că $n = 6$ este special.

b) Determinați toate numerele speciale.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VI-a

Problema 1. Determinați numerele naturale x, y, z pentru care are loc relația

$$2^x - 2^y - 2^z = 1023.$$

Problema 2. a) Arătați că numerele $12n+13$ și $13n+14$ sunt prime între ele, pentru orice număr natural n.

b) Determinați numărul perechilor (a, b) de numere naturale pentru care există un număr natural n astfel încât $\dfrac{a}{b} = \dfrac{12n+13}{13n+14}$ și $17a + 19b < 2024$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Spunem că numerele naturale nenule m și n au proprietatea P dacă pentru orice divizor d_1 al lui m și orice divizor d_2 al lui n, numărul $d_1 + d_2$ este prim.

a) Arătați că dacă m și n au proprietatea P și sunt diferite, atunci numărul $m + n$ este impar.

b) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m \leqslant n$, care au proprietatea P.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 54°$ și $\sphericalangle ACB = 45°$. Fie punctele D pe segmentul BC și E pe segmentul AD astfel încât $AD = AB$ și $BE = BD$. Notăm cu F intersecția dintre BE și AC, și fie DM bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADF$, unde $M \in AC$. Perpendiculara dusă din C pe AB intersectează DM în G.

Arătați că:

a) triunghiul ABF este isoscel;

b) $CG = CM$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie $ABCD$ un pătrat, M mijlocul laturii AD, T intersecția dreptelor BM și CD, iar $CP \perp BM$, $P \in MB$. Perpendiculara dusă prin punctul A pe dreapta AP intersectează dreapta BM în punctul Q. Arătați că:

a) $\sphericalangle APQ = \sphericalangle PCQ = 45^\circ$.

b) $PQ = QT = PC$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră două mulțimi A și B de numere reale care au proprietățile:

a) $0 \in A$;

b) Dacă $1 + x \in A$, atunci $\sqrt{1 + x + x^2} \in B$;

c) Dacă $\sqrt{x^2 - x + 1} \in B$, atunci $2 + x \in A$.

Arătați că $\sqrt{3}, \sqrt{13}, \sqrt{31}$ sunt elemente ale mulțimii B și $2024 \in A$.

Problema 3. Un număr natural $n \geqslant 2$ se numește *special* dacă există n numere naturale impare a căror sumă este egală cu produsul lor.

a) Arătați că 5 este un număr special.

b) Determinați câte numere speciale conține mulțimea $\{2, 3, \ldots, 2024\}$.

Problema 4. Se consideră un paralelogram $ABCD$ și punctele M pe latura DC, E și N pe diagonala AC, astfel încât $BE \perp AC$ și $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{EN}{EA}$.

Arătați că, dacă MN și NB sunt perpendiculare, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VIII-a

Problema 1. Se consideră numerele reale nenule a și b, astfel încât

$$3\left(a^6+b^6\right)=a^2b^2\left(a^2b^2+9\right).$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele a și b este irațional.

Problema 2. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu baza $ABCD$ și punctele M, N și P, mijloacele muchiilor AD, BC, respectiv VA. Demonstrați că unghiul dreptei CP cu planul (BAD) are măsura de $45°$ dacă și numai dacă unghiul dreptei CP cu planul (VMN) are măsura de $30°$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinați numerele reale x și y care verifică simultan condițiile:

(i) $x \geqslant 2y^2$

(ii) $y \geqslant 2x^2$

(iii) numărul $8(x-y)$ este întreg.

Problema 4. Dacă m este un număr natural nenul, notăm cu $S(m)$ suma divizorilor naturali ai lui m, iar dacă n și p sunt numerele naturale nenule, notăm cu $C(n,p)$ suma câturilor împărțirilor lui n la divizorii naturali ai lui p (de exemplu, $C(18,10)=18+9+3+1=31$).

Fie a și b două numere naturale nenule.

a) Demonstrați că, dacă $S(a)=C(a,b)$ și $S(b)=C(b,a)$, atunci $a=b$.

b) Este totdeauna adevărat că, dacă $S(a)+S(b)=C(a,b)+C(b,a)$, atunci $a=b$?

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie patrulaterul convex $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Dacă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OC}$, arătați că $ABCD$ este un paralelogram.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = \dfrac{1}{2}$ și $2n \cdot a_{n+1} = (n+1)a_n$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Stabiliți formula termenului general a_n al șirului, unde n este un număr natural nenul.

b) Dacă $b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, arătați că numerele $\{b_n\}, \{b_{n+1}\}$ și $\{b_{n+2}\}$ nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru niciun număr natural nenul n.

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x.)

Problema 3. Se consideră numărul natural compus n și $1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_k = n$ divizorii naturali ai lui n, unde $k \geq 3$. Dacă toate ecuațiile $d_{i+2}x^2 - 2d_{i+1}x + d_i = 0$, unde $i \in \{1, 2, ..., k-2\}$, au soluții reale, arătați că există un număr prim p astfel încât $n = p^{k-1}$.

Problema 4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și X mijlocul laturii BC. Perpendiculara în H pe HX taie laturile (AB) și (AC) în punctele Y respectiv Z. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cu O' centrul cercului circumscris triunghiului BHC.

a) Arătați că $HY = HZ$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AZ} = 2\overrightarrow{OO'}$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a X-a

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b > 0$. Determinați cea mai mică valoare posibilă a numărului real α pentru care:

$$(a+b)^x \geq a^x + b, \quad \forall x \geq \alpha.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază 1. Pentru orice $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$, notăm $s(M) = OH_1^2 + OH_2^2 + OH_3^2$, unde H_1, H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, respectiv MCA.

a) Demonstrați că dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci $s(M) = 6$, oricare ar fi $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$.

b) Demonstrați că dacă există trei puncte distincte $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$ astfel încât $s(M_1) = s(M_2) = s(M_3)$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie a, b, c numere complexe nenule de același modul pentru care numerele $A = a + b + c$ și $B = abc$ sunt reale. Demonstrați că, pentru orice număr natural n, numărul $C_n = a^n + b^n + c^n$ este real.

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:

$$f(x + y^{2n}) = f(f(x)) + y^{2n-1} f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2024

CLASA a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^{2023} = X^{2022}$. Demonstraţi că $X^3 = X^2$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie un număr natural $p \geq 2$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = a > 0$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + \left[\dfrac{p}{x_n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent şi determinaţi limita sa în funcţie de valorile parametrului a. Notaţie: $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^T = -A$, unde A^T este transpusa matricei A.

a) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $A^2 = O_n$, arătaţi că $A = O_n$.

b) Dacă n este un număr natural impar şi există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât matricea A este adjuncta matricei B, arătaţi că $A^2 = O_n$.

Problema 4. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este continuă. Presupunem că, pentru oricare numere reale $a < b < c$, există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent la b pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$ şi are loc relaţia

$$f(a) < \lim_{n\to\infty} g(x_n) < f(c).$$

a) Daţi un exemplu de astfel de funcţii, pentru care g este discontinuă în orice punct real.

b) Arătaţi că, dacă g este monotonă, atunci $f = g$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2024

CLASA a XII-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale n, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care ecuaţia

$$x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0}$$

are o unică soluţie în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $f : [0,1] \longrightarrow (0, \infty)$ o funcţie continuă pe $[0,1]$, iar $A = \int\limits_0^1 f(t)\, dt$.

a) Arătaţi că funcţia $F : [0,1] \longrightarrow [0, A]$, definită pentru orice $x \in [0,1]$ prin $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, este inversabilă, cu inversa derivabilă.

b) Arătaţi că există o unică funcţie $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, astfel încât egalitatea

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_{g(x)}^1 f(t)\, dt \tag{1}$$

să aibă loc pentru orice $x \in [0,1]$.

c) Arătaţi că există $c \in [0,1]$ pentru care $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x) - c}{x - c} = -1$, unde g este funcţia unic determinată de relaţia (1).

Problema 3. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Spunem că inelul $(A, +, \cdot)$ are proprietatea $CP(k)$, dacă pentru orice $a, b \in A$ există $c \in A$, astfel încât $a^k = b^k + c^k$.

a) Daţi un exemplu de inel finit $(A, +, \cdot)$, care nu are proprietatea $CP(k)$ pentru niciun număr natural k, cu $k \geq 2$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $M(n) = \{m \in \mathbb{N}^* | \, (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) \text{ are proprietatea } CP(m)\}$. Demonstraţi că $M(n)$ este un monoid în raport cu operaţia de înmulţire, inclus în mulţimea $2 \cdot \mathbb{N} + 1$ a numerelor naturale impare.

Problema 4. Fie $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $f(0) = 0$, iar $0 \leq f'(x) \leq 1$ pentru orice $x > 0$. Demonstraţi că

$$\int_0^a f(t)^{2n+1}\, dt \leq (n+1) \cdot \left(\int_0^a f(t)^n\, dt \right)^2, \qquad \text{pentru orice } a > 0 \text{ şi orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.