SUBIECTUL I

1) Determinați numărul complex z, știind că $3\bar{z} - z = 2 - 8i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 1$, unde m este un număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{1+4x} = 1 - x$

4) Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.

5) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3), B(4,1)$ și $C(2,5)$. Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B.

6) Arătați că $(1 + \mathrm{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x - (1 + \mathrm{ctg}^2 x) \cdot \sin^2 x = 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II

1) Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$

b) Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Aflați numerele reale m pentru care $A(1)A(2) \cdot \ldots \cdot A(15) = A(m^2 + m + 72)$

2) Se consideră polinomul $f = x^3 - 3x^2 + ax - 2$, unde a este un număr real.

a) Determinați numărul real a pentru care polinomul f se divide cu polinomul $X - 1$

b) Pentru $a = 4$ determinați rădăcinile polinomului f.

c) Aflați valorile lui a pentru care rădăcinile polinomului f verifică relația $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$

SUBIECTUL III

1) Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$.

a) Arătați că $f'(x) = -x(x+2)e^{-x}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f

c) Demonstrați că $0 \le f\left(-\frac{1}{e}\right) + f(\pi) \le 8$

2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}$

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = e(e-1)$

b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$

c) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e-1}{2e^2}$

Prof. Călugăru Mihai